CONTROL GEOMETRÍA

1.- Dada la recta $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+2}{-1}$ y el plano $3x-my+z=1$, se pide:

a) Determinar **m** para que sean paralelos.

b) ¿Existe **m** para que el plano contenga a la recta? Razona la respuesta. (2 puntos)

2.- Los puntos A=(-4,5,2), B=(2,-2,0), C=(3,-4,-2) y D=(a,b,c) son vértices consecutivos de un paralelogramo. Halla a, b y c. (2 puntos)

3.- Dados los planos de ecuaciones: $\left.\begin{array}{l}\pi_1 \equiv x-ay+2z=0\\ \pi_2 \equiv 6x \quad +5z=0\\ \pi_3 \equiv 4x-2y+3z=0\end{array}\right\}$ (4 puntos)

a) Halla el valor de a para que los tres planos pasen por una recta.
b) Halla las ecuaciones paramétricas de la recta r determinada para el valor de a obtenido en el apartado anterior.
c) Calcula las ecuaciones de la recta s que es paralela a r y pasa por (1,1,1).
d) Calcula la ecuación del plano que contiene a r y a s.

4.- Estudia la posición relativa de las rectas: (2 puntos)

$r:\begin{cases}2x+3y+z=1\\ x-2y-z=2\end{cases}$ y $r':\frac{x-1}{2}=y=\frac{z+2}{3}$

SOLUCIONES

1.-a) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+2}{-1}$ en paramétricas $r\equiv\begin{cases}x=1+2\lambda\\ y=-1+3\lambda\\ z=-2-\lambda\end{cases}$ y tenemos el plano:

$3x-my+z=1$ y sustituimos: $3(1+2\lambda)-m(-1+3\lambda)+(-2-\lambda)=1$

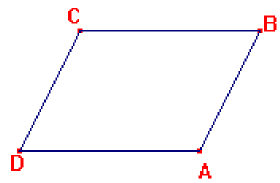
para que la recta y el plano sean paralelos esta ecuación tiene que ser incompatible, veamos: $3+6\lambda+m-3\lambda m-2-\lambda=1\to(6-3m-1)\lambda=-m$,tendrá que ser $6-3m-1=0\to-3m=-5\to m=\frac{5}{3}$ para que sean paralelos

b) **NO**, ya que tendría que tener infinitas soluciones, es decir, tendría que quedar

$0\lambda=0\Rightarrow\left.\begin{matrix}6-3m-1=0\\ -m=0\end{matrix}\right\}$ IMPOSIBLE

2.- Si ABCD es un paralelogramo, los lados son paralelos dos a dos , o lo que es lo mismo, los vectores AB y DC son iguales y los DA y CB también (ver dibujo)

De donde:



$\overrightarrow{AB}=(6,-7,-2)=\overrightarrow{DC}=(3-a,-4-b,-2-c)$

o también $\overrightarrow{DA}=(-4-a,5-b,2-c)=\overrightarrow{CB}=(-1,2,2)$

de cualquiera de las dos igualdades sale la solución:

$a=-3;\ b=3;\ c=0\Rightarrow D(-3,3,0)$

3.- Dados los planos de ecuaciones: $\left.\begin{matrix}\pi_1\equiv x-ay+2z=0\\ \pi_2\equiv 6x\qquad+5z=0\\ \pi_3\equiv 4x-2y+3z=0\end{matrix}\right\}$

a) Halla el valor de a para que los tres planos pasen por una recta.

El sistema tiene que ser compatible indeterminado

$\left.\begin{matrix}x-ay+2z=0\\ 6x\qquad+5z=0\\ 4x-2y+3z=0\end{matrix}\right\}A=\begin{pmatrix}1&-a&2\\6&0&5\\4&-2&3\end{pmatrix}$ es un sistema homogéneo, luego, tiene que ser

$\begin{vmatrix}1&-a&2\\6&0&5\\4&-2&3\end{vmatrix}=0\Rightarrow-20a-24+10+18a=0\Rightarrow-2a-14=0\to a=-7$ y entonces

se cumple que r(A)=2, ya que $\begin{vmatrix}6&0\\4&-2\end{vmatrix}=-12\neq0$

b) Halla las ecuaciones paramétricas de la recta r determinada para el valor de a obtenido en el apartado anterior.

$\left.\begin{matrix}6x\qquad+5z=0\\ 4x-2y+3z=0\end{matrix}\right\}\begin{vmatrix}6&0\\4&-2\end{vmatrix}\neq0\to\begin{cases}z=\lambda\\ x=-\frac{5}{6}\lambda\end{cases}\to-\frac{20}{6}\lambda-2y+3\lambda=0$

con lo que la recta pedida es $r \equiv \begin{cases} x = -\frac{5}{6}\lambda \\ y = -\frac{1}{6}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

c) Calcula las ecuaciones de la recta s que es paralela a r y pasa por (1,1,1).
Conocemos un punto (1,1,1) y el vector de dirección el mismo que el de r, es decir $\left(-\frac{5}{6}, -\frac{1}{6}, 1\right)$, pero tomaremos como $\vec{v}(-5,-1,6)$ (proporcional)

$$s \equiv \frac{x-1}{-5} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{6}$$

d) Calcula la ecuación del plano que contiene a r y a s.
Punto (1,1,1), $\vec{v}(-5,-1,6)$ y el otro vector de dirección lo obtenemos uniendo un punto de r: A(0,0,0), con un punto de s: B(1,1,1), $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1,1,1)$

Plano pedido:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ -5 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0\, r$$

Plano pedido: $7x - 11y + 4x = 0$

4.- $r: \begin{cases} 2x+3y+z=1 \\ x-2y-z=2 \end{cases}$ y $r': \frac{x-1}{2} = y = \frac{z+2}{3}$ las ponemos en paramétricas:

$$r: \begin{cases} 2x+3y = 1-z \\ x-2y = 2+z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x+3y = 1-\lambda \\ x-2y = 2+\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x+3y = 1-\lambda \\ -2x+4y = -4-2\lambda \end{cases} \rightarrow y = -3-3\lambda$$

$$x - 2(-3-3\lambda) = 2+\lambda \rightarrow x = 2+\lambda-6-6\lambda = -4-5\lambda$$

$r: \begin{cases} x = -4-5\lambda \\ y = -4-2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ $\quad r: \begin{cases} x = 1+2\mu \\ y = \mu \\ z = -2+3\mu \end{cases}$ posición relativa:

$$\left.\begin{matrix} -4-5\lambda = 1+2\mu \\ -4-2\lambda = \mu \\ \lambda = -2+3\mu \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} 2\mu+5\lambda = -5 \\ \mu+2\lambda = -4 \\ 3\mu-\lambda = 2 \end{matrix}\right\} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -5 \\ 1 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

r(A) = 2 ya que $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$, vectores de dirección NO proporcionales

$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -5 \\ 1 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 8-60+5+30-8-10 \neq 0 \rightarrow$ r(A*) = 3 **SE CRUZAN**